**Лекция 3 Методы интегрирования (продолжение)**

**21.2** **Вычисление рациональных интегралов от тригонометрических функций**

Пусть трансцендентную функцию, содержащую тригонометрические функции  и  можно рационализировать. Тогда рациональные интегралы вида  можно решать методом замены переменной с помощью *универсальной тригонометрической подстановки*  при . (1)

В этом случае

, , , . (2)

После замены переменной получим , т.е. интеграл от рациональной дроби.

**М21.2.1 Пример 1.** Найти интеграл 

*Решение:* используем универсальную тригонометрическую подстановку;







.

**М21.2.2** Пусть подынтегральная функция  является нечетной относительно : . В этом случае лучше использовать подстановку .

**М25.2.3 Пример 1.** Найти интеграл .

*Решение:* подынтегральная функция является нечетной относительно . Используем подстановку , при этом предварительно выразим  через .

.

Подынтегральная функция с новым аргументом является неправильной рациональной дробью.

Разделив числитель на знаменатель, неправильную рациональную дробь представим в виде суммы целой части и правильной дроби: . Тогда получим:  **М21.2.4** Если подынтегральная функция  является нечетной относительно : , то используют подстановку .

**М21.2.5 Пример.** Найти интеграл .

*Решение:* поскольку подынтегральная функция является нечетной , то используем подстановку :



**М21.2.6** Если подынтегральная функция  является четной относительно  и , т.е. , то целесообразно использовать подстановку , . Из тригонометрии известно, что , отсюда , . Тогда .

**М21.2.7 Пример.** Найти интеграл .

*Решение:* подынтегральная функция является четной относительно  и .



.

**М21.2.8** В заключение в качестве важного частного случая рассмотрим интегралы вида , где  - натуральные числа.

Если хотя бы одно из чисел  нечетно, то подынтегральная функция является нечетной либо относительно синуса, либо относительно косинуса, что позволяет применить замену  или .

Если оба числа  четные, то подынтегральная функция является четной относительно  и , что позволяет применить подстановку , .

**21.3** **Нахождение рациональных интегралов от функций, содержащих радикалы**

**М21.3.1** Пусть подынтегральная функция является рациональной функцией от радикалов различных степеней (в частном случае от одного радикала): , где  - натуральные числа,  (в частных случаях может быть  или даже );  - действительные числа и .

Тогда интегралы вида  приводятся к интегралам от рациональных дробей с помощью подстановки , где  - наименьшее общее кратное чисел  (НОК).

**М21.3.2 Пример.** Найти интеграл .

*Решение:* . Прямая подстановка , : 





.

**21.4** **Нахождение рациональных интегралов от функций, содержащих квадратные радикалы из квадратных двучленов**

Интегралы с подынтегральными функциями, содержащими выражения , приводятся к рациональным интегралам вида с помощью следующих тригонометрических подстановок:

**М21.4.1**  - подстановка  или ;

**М21.4.2**  - подстановка  или ;

**М21.4.3**  - подстановка  или ;

*Замечание:* при применении подстановки  к выражению получим . Но, поскольку, областью существования функции  является интервал  и , то . Но в интервале  функция  и поэтому .

Аналогично 

**М21.4.4 Пример 1.** Найти интеграл .

*Решение:* 





.

**М21.4.5 Пример 2.** Найти .

*Решение:* 

.

**М21.4.6 Пример3.** Найти интеграл .





.

С помощью рассмотренных интегралов можно интегрировать функции, содержащие квадратные корни из квадратичных трехчленов вида . Квадратные трехчлены в таких интегралах предварительно методом дополнения до полных квадратов приводятся к двучленам  и затем используются вышеуказанные тригонометрические подстановки.

**М21.4.7 Пример.** Найти интеграл .

Решение: 





**Контрольные вопросы:**

1. Что называется универсальной тригонометрической подстановкой? В каких случаях она применяется?
2. Как интегрируются функции, содержащие радикалы от выражений вида ?
3. Как интегрируются функции, содержащие квадратные радикалы из квадратных двучленов? Как интегрируются функции, содержащие квадратные радикалы из квадратных трехчленов?